

# 有界线性算子及其函数的 Browder 定理的判定\*

仇思楠, 曹小红

陕西师范大学数学与统计学院, 陕西 西安 710119

**摘要:** 令  $H$  为无限维复可分的 Hilbert 空间,  $B(H)$  为  $H$  上的有界线性算子全体。对  $T \in B(H)$ , 若  $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$ , 称  $T$  满足 Browder 定理, 其中  $\sigma_w(T)$  和  $\sigma_b(T)$  分别表示算子  $T$  的 Weyl 谱和 Browder 谱。本文借助新定义的谱集, 给出了有界线性算子及其函数满足 Browder 定理的新的判定方法。

**关键词:** Browder 定理; 谱; Fredholm 算子的摄动定理

**中图分类号:** O177.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(2022)05-0165-08

## Judgement of Browder's theorem for bounded linear operators and their functions

QIU Sinan, CAO Xiaohong

School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China

**Abstract:** Let  $H$  be an infinite dimensional separable complex Hilbert space and  $B(H)$  the algebra of all bounded linear operators on  $H$ . An operator  $T \in B(H)$  is said to satisfy Browder's theorem if  $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$ , where  $\sigma_w(T)$  and  $\sigma_b(T)$  denote the Weyl spectrum and the Browder spectrum of  $T$ , respectively. With the help of a newly defined spectral set, we give new judgment methods for linear bounded operators and their functions to obey Browder's theorem.

**Key words:** Browder's theorem; spectrum; perturbation theorem of Fredholm operators

线性算子的谱理论是算子理论的重要组成部分。该理论源于代数方程、线性方程组、积分方程和微分方程的特征值求解问题, 与算子方程的求解关系密切。1909年, Weyl<sup>[1]</sup>在检测 Hilbert 空间上自伴算子所有紧摄动的谱时发现: 自伴算子  $T$  的所有紧摄动谱集的交集恰好是其谱集中非孤立的有限重特征值全体, 这一性质被人们称为 Weyl 定理。自此之后, 一方面, 许多学者开始研究哪些算子满足 Weyl 定理, 于是满足 Weyl 定理的算子范围不断地扩大<sup>[2-9]</sup>; 另一方面, Weyl 定理的形式也在不断变化, 其中 Weyl 定理的一种变形就是由 Harte 和 Lee 定义的 Browder 定理<sup>[10]</sup>。近年来, 许多学者利用不同的谱集给出了算子满足 Weyl 型定理的各种判定方法<sup>[11-13]</sup>。本文将借鉴文献[11]的思想方法, 用一种新定义的谱集来刻画有界线性算子及其函数的 Browder 定理。

## 1 预备知识

在本文中,  $H$  表示无限维复可分的 Hilbert 空间,  $B(H)$  表示  $H$  上的有界线性算子全体,  $T^*$  表示  $T \in B(H)$  的共轭算子。称算子  $T \in B(H)$  为上半 Fredholm 算子, 若  $T$  的零空间  $N(T)$  是有限维的且值域

\* 收稿日期: 2020-12-01 录用日期: 2021-04-24 网络首发日期: 2022-03-10

基金项目: 国家自然科学基金(11471200)

作者简介: 仇思楠(1995年生), 女; 研究方向: 算子理论; E-mail: qiusinan111@163.com

通信作者: 曹小红(1972年生), 女; 研究方向: 算子理论; E-mail: xiaohongcao@snnu.edu.cn

$R(T)$ 闭; 称  $T \in B(H)$  为下半 Fredholm 算子, 若值域  $R(T)$  的余维数是有限的; 称  $T \in B(H)$  为 Fredholm 算子, 若  $T$  既为上半 Fredholm 算子又为下半 Fredholm 算子。对一个半 Fredholm 算子  $T$  而言 (上半或下半), 令  $n(T) = \dim N(T)$ ,  $d(T) = \dim(H/R(T))$ , 其指标定义为  $\text{ind}(T) = n(T) - d(T)$ . 算子  $T \in B(H)$  的升标  $\text{asc}(T)$  为满足  $N(T^n) = N(T^{n+1})$  的最小的非负整数  $n$ , 若这样的整数不存在, 则记  $\text{asc}(T) = +\infty$ ; 算子  $T \in B(H)$  的降标  $\text{des}(T)$  为满足  $R(T^n) = R(T^{n+1})$  的最小的非负整数  $n$ , 若这样的整数不存在, 则记  $\text{des}(T) = +\infty$ . 若  $T$  是指标为零的 Fredholm 算子, 称  $T$  为 Weyl 算子; 若  $T$  是有有限的升降标的 Fredholm 算子, 称  $T$  为 Browder 算子; 若  $N(T) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} R(T^n)$ , 称  $T \in B(H)$  为 Saphar 算子; 若  $T \in B(H)$  为 Saphar 算子且  $R(T)$  闭, 称  $T$  为 Kato 算子。

对  $T \in B(H)$ , 算子  $T$  的谱, 本质谱, Weyl 谱, Browder 谱, 本质逼近点谱, Saphar 谱, Kato 谱分别表示为  $\sigma(T)$ ,  $\sigma_e(T)$ ,  $\sigma_w(T)$ ,  $\sigma_b(T)$ ,  $\sigma_{ea}(T)$ ,  $\sigma_s(T)$  以及  $\sigma_k(T)$ . 相应的预解集分别为:  $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ ,  $\rho_e(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_e(T)$ ,  $\rho_w(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_w(T)$ ,  $\rho_b(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_b(T)$ ,  $\rho_{ea}(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_{ea}(T)$ ,  $\rho_s(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_s(T)$ ,  $\rho_k(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_k(T)$ . 记  $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; R(T - \lambda I) \text{不闭}\}$ , 由 Kato 算子定义可知  $\sigma_k(T) = \sigma_s(T) \cup \sigma_c(T)$ . 此外, 记  $\sigma_0(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T)$ ,  $\rho_c^+(T) = \{\lambda \in \rho_e(T); \text{ind}(T - \lambda I) > 0\}$ . 用  $B^{\circ}(\lambda_0; \varepsilon)$  表示  $\lambda_0$  的  $\varepsilon$  空心邻域,  $\mathbb{D}$  表示单位闭圆盘,  $\Gamma$  表示单位圆周。对集合  $E \subseteq \mathbb{C}$ , 用  $\text{iso } E$  表示  $E$  中孤立点的全体,  $\partial E$  表示  $E$  中边界点的全体,  $\text{acc } E$  表示  $E$  中聚点的全体,  $\text{int } E$  表示  $E$  中内点的全体。

我们知道, 对于  $T \in B(H)$ , 任给多项式  $p$ , 有  $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$ ,  $\sigma_e(p(T)) = p(\sigma_e(T))$ ,  $\sigma_b(p(T)) = p(\sigma_b(T))$ ,  $\sigma_a(p(T)) = p(\sigma_a(T))$ . 特别地, 由文献([14, Satz 6])知, 对于  $T \in B(H)$ , 任给多项式  $p$ , 有  $\sigma_k(p(T)) = p(\sigma_k(T))$ .

## 2 有界线性算子的 Browder 定理

在文献[11]中, 作者定义了一个新的谱集  $\sigma_3(T)$  并由此研究了有界线性算子  $T$  及其函数演算的 Weyl 型定理。下面将继续该项工作。首先定义集合

$$\rho_3(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) < \infty, \text{存在 } \varepsilon > 0, \text{当 } 0 < |\mu - \lambda| < \varepsilon \text{ 时}, \\ \mu \notin \sigma_w(T) \text{ 并且 } N(T - \mu I) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} R[(T - \mu I)^n]\}.$$

令  $\sigma_3(T) = \mathbb{C} \setminus \rho_3(T)$ , 则  $\sigma_3(T) \subseteq \sigma_w(T) \subseteq \sigma_b(T) \subseteq \sigma(T)$ .

设  $T \in B(H)$ , 算子  $T$  满足 Browder 定理是指  $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) \subseteq \pi_{00}(T)$  或  $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$ , 其中  $\pi_{00}(T) = \{\lambda \in \text{iso } \sigma(T); 0 < n(T - \lambda I) < \infty\}$ ; 算子  $T$  满足 Weyl 定理是指  $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T)$ . 显然, Browder 定理只是 Weyl 定理的一部分, 算子满足 Weyl 定理则必定满足 Browder 定理, 反之, 若算子满足 Browder 定理, 则未必满足 Weyl 定理。

**例 1** 设  $T \in B(\ell^2)$  定义如下:  $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(0, 0, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$ , 则  $\sigma(T) = \sigma_w(T) = \sigma_b(T) = \{0\}$ , 即  $T$  满足 Browder 定理, 但是  $n(T) = 1$ , 从而  $\pi_{00}(T) = \{0\}$ , 于是  $T$  不满足 Weyl 定理。

下面, 借助  $\sigma_3(T)$  来刻画有界线性算子及其函数的 Browder 定理。

**定理 1** 设  $T \in B(H)$ , 则下列叙述等价:

- (i)  $T$  满足 Browder 定理;
- (ii)  $\sigma(T) = \sigma_3(T) \cup \text{iso } \sigma(T)$ ;
- (iii)  $\text{acc } \sigma(T) \subseteq \sigma_3(T)$ ;
- (iv)  $\sigma_3(T) = \text{acc } \sigma(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) = \infty\}$ ;
- (v)  $\text{int } \sigma(T) \subseteq \sigma_3(T)$ ;
- (vi)  $\sigma(T) = \sigma_3(T) \cup \partial \sigma(T)$ ;
- (vii)  $\text{int } \sigma(T) = \text{int } \sigma_3(T)$ ;
- (viii)  $\text{acc } \sigma(T) = \text{acc } \sigma_3(T) \cup \text{acciso } \sigma(T)$ ;

(ix)  $\sigma_3(T) = \text{int } \sigma(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) = \infty\} \cup [\text{acc } \sigma(T) \cap \partial\sigma(T)];$

(x)  $\sigma(T) = \text{acc } \sigma_3(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) = \infty\} \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_0(T);$

(xi)  $\sigma(T) = \text{acc } \sigma_3(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) = \infty\} \cup \sigma_\kappa(T);$

(xii)  $\sigma(T) = \sigma_3(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_0(T);$

(xiii)  $\sigma(T) = \sigma_3(T) \cup \sigma_\kappa(T).$

**证明**

(i)  $\Rightarrow$  (ii) 任给  $\lambda_0 \notin \sigma_3(T) \cup \text{iso } \sigma(T)$ , 由  $\rho_3(T)$  的定义及已知条件  $T$  满足 Browder 定理可知  $\lambda_0 \in \rho(T) \cup \text{iso } \sigma(T)$ . 又由于  $\lambda_0 \notin \text{iso } \sigma(T)$ , 因此  $\lambda_0 \notin \sigma(T)$ . 反包含显然成立。

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) 由  $\text{acc } \sigma(T) \subseteq \sigma(T) = \sigma_3(T) \cup \text{iso } \sigma(T)$  知  $\text{acc } \sigma(T) \subseteq \sigma_3(T)$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) 对任意  $\lambda_0 \notin \text{acc } \sigma(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) = \infty\}$ , 则  $\lambda_0 \in \rho(T) \cup \text{iso } \sigma(T)$ , 且  $n(T - \lambda_0 I) < \infty$ , 于是  $\lambda_0 \notin \sigma_3(T)$ . 反包含显然成立。

(iv)  $\Rightarrow$  (v) 显然。

(v)  $\Rightarrow$  (vi)  $\sigma(T) = \text{int } \sigma(T) \cup \partial\sigma(T) \subseteq \sigma_3(T) \cup \partial\sigma(T)$ .

(vi)  $\Rightarrow$  (vii) 由  $\text{int } \sigma(T) \subseteq \sigma(T) = \sigma_3(T) \cup \partial\sigma(T)$  知  $\text{int } \sigma(T) \subseteq \sigma_3(T)$ , 于是  $\text{int } \sigma(T) \subseteq \text{int } \sigma_3(T)$ . 反包含显然成立。

(vii)  $\Rightarrow$  (i) 设  $T - \lambda_0 I$  是 Weyl 算子, 则  $\lambda_0 \notin \text{int } \sigma_3(T) = \text{int } \sigma(T)$ , 所以  $\lambda_0 \in \rho(T) \cup \partial\sigma(T)$ , 故  $T - \lambda_0 I$  是 Browder 算子。

(ii)  $\Rightarrow$  (viii) 显然。

(viii)  $\Rightarrow$  (i) 设  $T - \lambda_0 I$  是 Weyl 算子, 则  $\lambda_0 \notin \text{acc } \sigma_3(T) \cup \text{acciso } \sigma(T)$ , 因此  $\lambda_0 \notin \text{acc } \sigma(T)$ , 于是  $T - \lambda_0 I$  是 Browder 算子。

(iii)  $\Rightarrow$  (ix) 对任意  $\lambda_0 \notin \text{int } \sigma(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) = \infty\} \cup [\text{acc } \sigma(T) \cap \partial\sigma(T)]$ , 则  $\lambda_0 \in \rho(T) \cup \text{iso } \sigma(T)$ , 且  $n(T - \lambda_0 I) < \infty$ , 因此  $\lambda_0 \notin \sigma_3(T)$ . 反包含显然成立。

(ix)  $\Rightarrow$  (v) 显然。

(i)  $\Rightarrow$  (x) 任给  $\lambda_0 \notin \text{acc } \sigma_3(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) = \infty\} \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_0(T)$ , 则  $T - \lambda_0 I$  是上半 Fredholm 算子且  $\lambda_0 \in \rho_3(T) \cup \text{iso } \sigma_3(T)$  且  $\lambda_0 \notin \sigma_0(T)$ . 由半 Fredholm 算子的摄动理论以及  $\rho_3(T)$  的定义知  $T - \lambda_0 I$  为 Weyl 算子。由于  $T$  满足 Browder 定理, 则  $T - \lambda_0 I$  为 Browder 算子, 又由于  $\lambda_0 \notin \sigma_0(T)$ , 于是  $\lambda_0 \notin \sigma(T)$ . 反包含显然成立。

(x)  $\Rightarrow$  (xi) 显然。

(xi)  $\Rightarrow$  (i) 设  $T - \lambda_0 I$  是 Weyl 算子, 则存在  $\varepsilon > 0$ , 当  $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$  时,  $\lambda \in \rho_w(T) \cap \rho_\kappa(T)$ . 所以  $\lambda \notin \text{acc } \sigma_3(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) = \infty\} \cup \sigma_\kappa(T)$ , 从而  $T - \lambda I$  可逆。于是  $T - \lambda_0 I$  是 Browder 算子。

(i)  $\Rightarrow$  (xii) 任意  $\lambda_0 \notin \sigma_3(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_0(T)$ , 则  $T - \lambda_0 I$  是上半 Fredholm 算子, 且存在  $\varepsilon > 0$ , 当  $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$  时, 有  $\lambda \in \rho_w(T) \cap \rho_\kappa(T)$ . 又根据  $T$  满足 Browder 定理, 所以  $T - \lambda I$  可逆。于是  $T - \lambda_0 I$  是 Browder 算子, 又因为  $\lambda_0 \notin \sigma_0(T)$ , 因此  $\lambda_0 \notin \sigma(T)$ . 反包含显然成立。

(xii)  $\Rightarrow$  (xiii) 显然。

(xiii)  $\Rightarrow$  (i) 设  $T - \lambda_0 I$  是 Weyl 算子, 则存在  $\varepsilon > 0$ , 当  $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$  时,  $\lambda \in \rho_w(T) \cap \rho_\kappa(T)$ . 所以  $\lambda \notin \sigma_3(T) \cup \sigma_\kappa(T)$ , 从而  $T - \lambda I$  可逆。于是  $T - \lambda_0 I$  是 Browder 算子。

**注 1**

(i) 当  $T$  满足 Browder 定理时, 定理 1 的 (x) 中  $\sigma(T)$  分解的四部分缺一不可。

**例 2** 令  $T \in B(\ell^2)$  定义为:  $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ , 则  $\sigma(T) = \sigma_w(T) = \sigma_b(T) = \mathbb{D}$ , 但是  $\{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) = \infty\} = \sigma_0(T) = \emptyset$ ,  $\sigma_c(T) = \Gamma$ ,  $\sigma(T) \neq \{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) = \infty\} \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_0(T)$ , 故  $\text{acc } \sigma_3(T)$  不能缺。

**例 3** 令  $T \in B(\ell^2)$  定义为:  $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, x_3, x_4, \dots)$ , 则  $\sigma(T) = \{0, 1\}$ ,  $\sigma_w(T) = \sigma_b(T) = \{1\}$ , 即  $T$  满足 Browder 定理。但是  $\text{acc } \sigma_3(T) = \sigma_c(T) = \emptyset$ ,  $\{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) = \infty\} = \{1\}$ ,  $\sigma_0(T) = \{0\}$ ,  $\sigma(T) \neq \text{acc } \sigma_3(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_0(T)$ , 故  $\{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) = \infty\}$  不能缺。 $\sigma(T) \neq \text{acc } \sigma_3(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; n(T -$

$\lambda I = \infty\} \cup \sigma_c(T)$ , 故  $\sigma_0(T)$  不能缺。

**例 4** 令  $T \in B(\ell^2)$  定义为:  $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots\right)$ , 则  $\sigma(T) = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ ,  $\sigma_w(T) = \sigma_b(T) = \{0\}$ , 即  $T$  满足 Browder 定理。但是  $\text{acc } \sigma_3(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) = \infty\} = \emptyset$ ,  $\sigma_0(T) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ ,  $\sigma(T) \neq \text{acc } \sigma_3(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) = \infty\} \cup \sigma_0(T)$ , 故  $\sigma_c(T)$  不能缺。

(ii) 同样, 通过举例可知, 当  $T$  满足 Browder 定理时, 定理 1 的(ii), (iv), (vi), (viii), (ix), (xi)~(xiii) 中相关的  $\sigma(T)$  分解的几部分均缺一不可。

(iii) 当  $\sigma(T) = \sigma_3(T)$  时,  $T$  满足 Browder 定理。反之不成立。如例 4, 虽然  $T$  满足 Browder 定理, 但是  $\sigma(T) = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ ,  $\sigma_3(T) = \{0\}$ ,  $\sigma(T) \neq \sigma_3(T)$ 。

(iv)  $\sigma(T) = \sigma_3(T)$  当且仅当  $T$  满足 Browder 定理且  $\{\lambda \in \text{iso } \sigma(T); n(T - \lambda I) < \infty\} = \emptyset$ 。

**证明** 必要性。根据定理 1,  $T$  满足 Browder 定理显然成立。由  $\{\lambda \in \text{iso } \sigma(T); n(T - \lambda I) < \infty\} \subseteq \rho_3(T) = \rho(T)$  知  $\{\lambda \in \text{iso } \sigma(T); n(T - \lambda I) < \infty\} = \emptyset$ 。

充分性。 $\sigma(T) \supseteq \sigma_3(T)$  显然。下证  $\sigma_3(T) \supseteq \sigma(T)$ 。若  $\lambda_0 \notin \sigma_3(T)$ , 由  $T$  满足 Browder 定理, 则  $\lambda_0 \in \rho(T) \cup \text{iso } \sigma(T)$ , 但是  $\{\lambda \in \text{iso } \sigma(T); n(T - \lambda I) < \infty\} = \emptyset$ , 于是  $\lambda_0 \notin \sigma(T)$ 。

(v) 当  $\text{acc } \sigma(T) = \text{acc } \sigma_3(T)$  时,  $T$  满足 Browder 定理。反之不成立。如例 4, 虽然  $T$  满足 Browder 定理, 但是  $\text{acc } \sigma(T) = \{0\}$ ,  $\text{acc } \sigma_3(T) = \emptyset$ ,  $\text{acc } \sigma(T) \neq \text{acc } \sigma_3(T)$ 。

(vi)  $\text{acc } \sigma(T) = \text{acc } \sigma_3(T)$  当且仅当  $T$  满足 Browder 定理且  $E = \emptyset$ , 其中

$$E = \{\lambda \in \mathbb{C}; \text{存在 } \varepsilon > 0, \text{当 } 0 < |\mu - \lambda| < \varepsilon \text{ 时}, n(T - \mu I) < \infty, \text{并且 } \mu \in \rho(T) \cup \text{iso } \sigma(T)\} \cap \text{acciso } \sigma(T).$$

**证明** 必要性。当  $\text{acc } \sigma(T) = \text{acc } \sigma_3(T)$  时,  $E \subseteq \text{acc } \sigma(T)$ , 但  $E \cap \text{acc } \sigma_3(T) = \emptyset$ , 故  $E = \emptyset$ 。

充分性。任给  $\lambda_0 \notin \text{acc } \sigma_3(T)$ , 则由  $T$  满足 Browder 定理可知存在  $\varepsilon > 0$ , 使得当  $0 < |\mu - \lambda_0| < \varepsilon$  时,  $n(T - \mu I) < \infty$  并且  $\mu \in \rho(T) \cup \text{iso } \sigma(T)$ 。由  $E = \emptyset$  知,  $\lambda_0 \notin \text{acciso } \sigma(T)$ 。从而当  $0 < |\mu - \lambda_0| < \varepsilon$  时,  $\mu \in \rho(T)$ , 即  $\lambda_0 \in \rho(T) \cup \text{iso } \sigma(T)$ 。故  $\text{acc } \sigma(T) = \text{acc } \sigma_3(T)$ 。

在定理 1 中, 主要用  $\sigma(T)$  与  $\sigma_3(T)$ ,  $\text{acc } \sigma(T)$  与  $\sigma_3(T)$ ,  $\text{int } \sigma(T)$  与  $\sigma_3(T)$ ,  $\sigma(T)$  与  $\text{acc } \sigma_3(T)$  之间的关系来刻画算子  $T$  的 Browder 定理。接下来, 继续用  $\sigma(T)$  与  $\text{acc } \sigma_3(T)$  之间的关系来讨论算子  $T$  的 Browder 定理。

**推论 1** 设  $T \in B(H)$ , 则下列叙述等价:

(i)  $T$  满足 Browder 定理;

(ii)

$$\sigma(T) = \text{acc } \sigma_3(T) \cup \text{acciso } \sigma(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) = \infty\} \cup \{\lambda \in \text{iso } \sigma(T); n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cup \sigma_0(T);$$

(iii)

$$\sigma(T) = \text{acc } \sigma_3(T) \cup \text{acciso } \sigma(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) = \infty\} \cup \{\lambda \in \text{iso } \sigma(T); n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cup \sigma_s(T).$$

**证明**

(i)  $\Rightarrow$  (ii) 任给  $\lambda_0 \notin \text{acc } \sigma_3(T) \cup \text{acciso } \sigma(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) = \infty\} \cup \{\lambda \in \text{iso } \sigma(T); n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cup \sigma_0(T)$ , 由定理 1 可知,  $\lambda_0 \in \rho(T) \cup \text{iso } \sigma(T)$ 。断言:  $\lambda_0 \notin \text{iso } \sigma(T)$ 。若否, 则  $n(T - \lambda_0 I) \geq d(T - \lambda_0 I)$ , 又  $n(T - \lambda_0 I) < \infty$ , 从而  $T - \lambda_0 I$  是 Fredholm 算子。由于  $\lambda_0 \in \text{iso } \sigma(T)$ , 因此  $\lambda_0 \in \sigma_0(T)$ 。这与  $\lambda_0 \notin \sigma_0(T)$  矛盾。于是  $\lambda_0 \notin \text{iso } \sigma(T)$  得证。反包含显然成立。

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) 显然。

(iii)  $\Rightarrow$  (i) 设  $T - \lambda_0 I$  是 Weyl 算子, 则存在  $\varepsilon > 0$ , 使得当  $0 < |\mu - \lambda_0| < \varepsilon$  时,  $\mu \in \rho_w(T) \cap \rho_s(T)$ 。故  $\mu \notin \text{acc } \sigma_3(T) \cup \text{acciso } \sigma(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; n(T - \lambda I) = \infty\} \cup \{\lambda \in \text{iso } \sigma(T); n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cup \sigma_s(T)$ , 从而  $\mu \notin \sigma(T)$ 。于是  $\lambda_0 \in \rho(T) \cup \text{iso } \sigma(T)$ , 即  $T - \lambda_0 I$  是 Browder 算子。

接下来, 用  $\sigma(T)$  和  $\text{int } \sigma_3(T)$  之间的关系来讨论算子  $T$  的 Browder 定理。

**推论 2** 设  $T \in B(H)$ , 则下列叙述等价:

- (i)  $T$  满足 Browder 定理;
- (ii)  $\sigma(T) = \text{int } \sigma_3(T) \cup \{\lambda \in \partial\sigma(T): n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = \infty\} \cup \sigma_0(T)$ ;
- (iii)  $\sigma(T) = \text{int } \sigma_3(T) \cup \{\lambda \in \partial\sigma(T): n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = \infty\} \cup \sigma_s(T)$ .

**证明**

(i)  $\Rightarrow$  (ii) 任给  $\lambda_0 \notin \text{int } \sigma_3(T) \cup \{\lambda \in \partial\sigma(T): n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = \infty\} \cup \sigma_0(T)$ , 则对任意  $B^\circ(\lambda_0, \varepsilon)$ , 存在  $\lambda_1 \in B^\circ(\lambda_0, \varepsilon)$ , 使得  $\lambda_1 \in \rho_3(T)$ . 于是存在  $\lambda_2 \in B^\circ(\lambda_0, \varepsilon)$ , 使得  $\lambda_2 \in \rho_w(T) \cup \rho_s(T)$ . 由  $T$  满足 Browder 定理, 所以  $\lambda_2 \in \rho(T)$ . 因此  $\lambda_0 \in \rho(T) \cup \partial\sigma(T)$ . 若  $\lambda_0 \in \partial\sigma(T)$ , 则  $T - \lambda_0 I$  是 Fredholm 算子, 由 Fredholm 算子的扰动定理可知,  $T - \lambda_0 I$  是 Weyl 算子, 又由  $T$  满足 Browder 定理且  $\lambda_0 \notin \sigma_0(T)$  得到  $\lambda_0 \in \rho(T)$ . 反包含显然成立。

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) 显然。

(iii)  $\Rightarrow$  (i) 设  $T - \lambda_0 I$  是 Weyl 算子, 则存在  $\varepsilon > 0$ , 使得当  $0 < |\mu - \lambda_0| < \varepsilon$  时,  $\mu \in \rho_w(T) \cap \rho_s(T)$ . 故  $\mu \notin \text{int } \sigma_3(T) \cup \{\lambda \in \partial\sigma(T): n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = \infty\} \cup \sigma_s(T)$ , 从而  $\mu \notin \sigma(T)$ . 于是  $\lambda_0 \in \rho(T) \cup \text{iso } \sigma(T)$ , 因此  $T - \lambda_0 I$  是 Browder 算子。

**注 2**

(i) 在推论 1 和推论 2 中, 通过举例可知, 当  $T$  满足 Browder 定理时,  $\sigma(T)$  分解的几部分仍然是缺一不可的。

(ii)  $\text{int } \sigma_3(T) = \emptyset$  且  $T$  满足 Browder 定理当且仅当

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \partial\sigma(T): n(T - \lambda I) \leq d(T - \lambda I)\} \cup \sigma_0(T).$$

**证明** 必要性。由条件及推论 2 知  $\sigma(T) = \{\lambda \in \partial\sigma(T): n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = \infty\} \cup \sigma_0(T)$ . 容易证明

$$\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = \infty\} = \{\lambda \in \partial\sigma(T): n(T - \lambda I) = \infty\} \subseteq \{\lambda \in \partial\sigma(T): d(T - \lambda I) = \infty\}.$$

于是可得

$$\begin{aligned} & \{\lambda \in \partial\sigma(T): n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = \infty\} \\ & \subseteq \{\lambda \in \partial\sigma(T): d(T - \lambda I) = \infty\} \subseteq \{\lambda \in \partial\sigma(T): n(T - \lambda I) \leq d(T - \lambda I)\}, \end{aligned}$$

所以  $\sigma(T) = \{\lambda \in \partial\sigma(T): n(T - \lambda I) \leq d(T - \lambda I)\} \cup \sigma_0(T)$ .

充分性。因为  $\sigma(T) = \{\lambda \in \partial\sigma(T): n(T - \lambda I) \leq d(T - \lambda I)\} \cup \sigma_0(T) \subseteq \partial\sigma(T)$ , 所以  $\text{int } \sigma(T) = \emptyset$ , 于是  $\text{int } \sigma_3(T) = \emptyset$ , 根据定理 1 可知  $T$  满足 Browder 定理。

(iii) 由前面的结论, 当  $\sigma(T) = \sigma_3(T)$  或  $\text{acc } \sigma(T) = \text{acc } \sigma_3(T)$  或  $\text{int } \sigma(T) = \text{int } \sigma_3(T)$  时,  $T$  均满足 Browder 定理。但是, 当  $\partial\sigma(T) = \partial\sigma_3(T)$  时, 无法确定  $T$  是否满足 Browder 定理。下面, 举例进行说明。

**例 5** 设  $A, B \in B(\ell^2)$  分别定义为:  $A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ ,  $B(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$ , 令  $T = \text{diag}(A, B)$ , 则  $\sigma(T) = \mathbb{D}$ ,  $\sigma_3(T) = \Gamma$ ,  $\partial\sigma(T) = \partial\sigma_3(T)$ , 但是  $\sigma_b(T) = \mathbb{D}$ ,  $\sigma_w(T) = \Gamma$ , 故  $T$  不满足 Browder 定理。

**例 6** 令  $T \in B(\ell^2)$  定义为:  $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(0, x_1, 0, \frac{x_3}{3}, 0, \frac{x_5}{5}, \dots\right)$ , 则  $\sigma(T) = \{0\}$ ,  $\sigma_3(T) = \{0\}$ ,

$\partial\sigma(T) = \partial\sigma_3(T) = \{0\}$ ,  $\sigma_b(T) = \sigma_w(T) = \{0\}$ ,  $T$  满足 Browder 定理。

接下来, 用  $\sigma(T)$  与  $\partial\sigma_3(T)$  之间的关系来研究算子  $T$  的 Browder 定理。

**推论 3** 设  $T \in B(H)$ , 则下列叙述等价:

- (i)  $T$  满足 Browder 定理;
- (ii)  $\sigma_3(T) = \text{int } \sigma(T) \cup \partial\sigma_3(T)$ ;
- (iii)  $\sigma(T) = \partial\sigma_3(T) \cup \text{iso } \sigma(T) \cup \text{acc } \sigma_w(T)$ ;
- (iv)  $\sigma(T) = \partial\sigma_3(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cup \text{acc } \sigma_w(T) \cup \sigma_0(T)$ ;
- (v)  $\sigma(T) = \partial\sigma_3(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cup \text{acc } \sigma_w(T) \cup \sigma_s(T)$ .

## 证明

(i)⇒(ii) 因为  $T$  满足 Browder 定理, 根据定理 1, 故  $\sigma_3(T) = \text{int } \sigma(T) \cup \partial\sigma_3(T)$ .

(ii) ⇒ (iii)  $\sigma(T) = \sigma_3(T) \cup [\rho_3(T) \cap \sigma(T)] = \text{int } \sigma(T) \cup \partial\sigma_3(T) \cup [\rho_3(T) \cap \sigma(T)]$ . 由  $\sigma_3(T) = \text{int } \sigma(T) \cup \partial\sigma_3(T)$  知,  $\rho_w(T) \subseteq \rho(T) \cup \partial\sigma(T)$ . 故  $T$  满足 Browder 定理, 于是  $\text{int } \sigma(T) \subseteq \text{acc } \sigma_w(T)$ ,  $\rho_3(T) \cap \sigma(T) \subseteq \text{iso } \sigma(T)$ . 因此  $\partial\sigma_3(T) \cup \text{iso } \sigma(T) \cup \text{acc } \sigma_w(T) \supseteq \sigma(T)$ . 反包含显然成立.

(iii)⇒(iv) 由 (iii) 知  $\sigma(T) = \partial\sigma_3(T) \cup \text{iso } \sigma(T) \cup \text{acc } \sigma_w(T)$ , 又因为

$$\text{iso } \sigma(T) \subseteq \partial\sigma_3(T) \cup \sigma_0(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\},$$

所以  $\sigma(T) \subseteq \partial\sigma_3(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cup \text{acc } \sigma_w(T) \cup \sigma_0(T)$ . 反包含显然成立.

(iv)⇒(v) 显然.

(v)⇒(i) 设  $T - \lambda_0 I$  是 Weyl 算子, 则存在  $\varepsilon > 0$ , 使是当  $0 < |\mu - \lambda_0| < \varepsilon$  时,  $\mu \in \rho_w(T) \cap \rho_s(T)$ . 故  $\mu \notin \partial\sigma_3(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cup \text{acc } \sigma_w(T) \cup \sigma_s(T)$ , 从而  $\mu \notin \sigma(T)$ . 于是  $\lambda_0 \in \rho(T) \cup \text{iso } \sigma(T)$ , 因此  $T - \lambda_0 I$  是 Browder 算子.

## 注 3

(i) 设  $T$  满足 Browder 定理且  $\{\lambda \in \text{iso } \sigma(T): n(T - \lambda I) < \infty\} = \emptyset$ , 则  $\partial\sigma(T) = \partial\sigma_3(T)$ . 反之不成立.

事实上, 由  $T$  满足 Browder 定理知  $\rho_3(T) = \{\lambda \in \text{iso } \sigma(T): n(T - \lambda I) < \infty\} \cup \rho(T) = \rho(T)$ , 于是  $\partial\sigma(T) = \partial\sigma_3(T)$ . 而当  $\partial\sigma(T) = \partial\sigma_3(T)$  时, 一定有  $\{\lambda \in \text{iso } \sigma(T): n(T - \lambda I) < \infty\} = \emptyset$ .

(ii)  $T$  满足 Browder 定理且  $\{\lambda \in \text{iso } \sigma(T): n(T - \lambda I) < \infty\} = \emptyset$  当且仅当  $\sigma(T) = \sigma_3(T)$ .

(iii)  $T$  满足 Browder 定理且  $\partial\sigma(T) = \partial\sigma_3(T)$  当且仅当  $\sigma(T) = \sigma_3(T)$ .

## 3 算子函数的 Browder 定理

我们知道, 算子满足 Browder 定理并不能推出其函数演算满足 Browder 定理. 接下来, 借助  $\sigma(T)$  和  $\sigma_3(T)$  之间的关系来讨论算子函数的 Browder 定理.

**定理 2** 设  $T \in B(H)$ , 则对任意的多项式  $p$ ,  $p(T)$  满足 Browder 定理当且仅当

(i)  $T$  满足 Browder 定理;

(ii) 对任意多项式  $p$ ,  $p(\sigma_3(T)) \subseteq \sigma_w(p(T))$ .

**证明** 必要性. (i) 显然成立. 对任意多项式  $p$ ,  $p(\sigma_3(T)) \subseteq p(\sigma_b(T)) = \sigma_b(p(T)) = \sigma_w(p(T))$ , 故 (ii) 成立.

充分性. 先证明对任意  $\lambda, \mu \in \rho_e(T)$ , 有  $\text{ind}(T - \lambda I) \cdot \text{ind}(T - \mu I) \geq 0$ . 反证: 若存在  $\lambda_0, \mu_0 \in \rho_e(T)$ , 使得  $\text{ind}(T - \lambda_0 I) = n > 0$ ,  $\text{ind}(T - \mu_0 I) = -m < 0$ , 其中  $n$  和  $m$  都是正整数. 令  $p_0(T) = (T - \lambda_0 I)^m (T - \mu_0 I)^n$ , 则  $p_0(T)$  为 Weyl 算子, 而  $0 = p_0(\lambda_0) = p_0(\mu_0) \in p_0(\sigma_3(T)) \subseteq \sigma_w(p_0(T))$ , 矛盾. 故对任意  $\lambda, \mu \in \rho_e(T)$ , 有  $\text{ind}(T - \lambda I) \cdot \text{ind}(T - \mu I) \geq 0$ . 设  $p(T) - \mu I$  是 Weyl 算子, 令  $p(x) - \mu = a(x - \lambda_1)^{n_1} (x - \lambda_2)^{n_2} \cdots (x - \lambda_k)^{n_k}$ ,  $\mu = p(\lambda_i), i = 1, \dots, k$ . 则  $p(T) - \mu I = a(T - \lambda_1 I)^{n_1} (T - \lambda_2 I)^{n_2} \cdots (T - \lambda_k I)^{n_k}$ , 且

$$0 = \text{ind}(p(T) - \mu I) = n_1 \text{ind}(T - \lambda_1 I) + n_2 \text{ind}(T - \lambda_2 I) + \cdots + n_k \text{ind}(T - \lambda_k I),$$

所以  $T - \lambda_i I$  是 Weyl 算子. 故  $T - \lambda_i I$  是 Browder 算子, 于是  $p(T) - \mu I$  是 Browder 算子.

**注 4** 对于定理 2, 考虑这样一个问题: 条件 “对任意多项式  $p$ ,  $p(\sigma_3(T)) \subseteq \sigma_w(p(T))$ ” 在什么情况下可以加强为 “对任意多项式  $p$ ,  $p(\sigma_3(T)) = \sigma_w(p(T))$ ”? 为此, 有如下结论.

设  $T \in B(H)$ , 则对任意的多项式  $p$ ,  $p(T)$  满足 Browder 定理且  $\{\lambda \in \text{iso } \sigma(T): n(T - \lambda I) < \infty\} = \sigma_0(T)$  当且仅当

(i)  $T$  满足 Browder 定理;

(ii) 对任意多项式  $p$ ,  $p(\sigma_3(T)) = \sigma_w(p(T))$ .

**证明** 必要性. 只需证  $p(\sigma_3(T)) \supseteq \sigma_w(p(T))$ . 对任意  $\mu_0 \notin p(\sigma_3(T))$ , 令  $p(x) - \mu_0 = a(x - \lambda_1)^{n_1} (x - \lambda_2)^{n_2} \cdots (x - \lambda_k)^{n_k}$ ,  $\mu_0 = p(\lambda_i), i = 1, \dots, k$ . 则  $p(T) - \mu_0 I = a(T - \lambda_1 I)^{n_1} (T - \lambda_2 I)^{n_2} \cdots (T - \lambda_k I)^{n_k}$ . 显然  $\lambda_i \notin \sigma_3(T)$ . 从而  $\lambda_i \in \rho(T) \cup \text{iso } \sigma(T)$ . 不妨设  $\lambda_i \in \text{iso } \sigma(T)$ , 则由已知条件得  $\lambda_i \in \sigma_0(T)$ , 因此  $T - \lambda_i I$  是

Browder 算子。故  $\mu_0 \notin \sigma_w(p(T))$ .

充分性。只需证  $\{\lambda \in \text{iso } \sigma(T); n(T - \lambda I) < \infty\} \subseteq \sigma_0(T)$ . 由已知条件可知  $\sigma_3(T) = \sigma_w(T)$ , 又因为  $\{\lambda \in \text{iso } \sigma(T); n(T - \lambda I) < \infty\} \subseteq \rho_3(T)$ , 所以  $\{\lambda \in \text{iso } \sigma(T); n(T - \lambda I) < \infty\} \subseteq \sigma_0(T)$ .

**推论 4** 设  $T \in B(H)$ , 则对任意的多项式  $p$ ,  $p(T)$  满足 Browder 定理当且仅当

- (i)  $T$  满足 Browder 定理;
- (ii) 对任意多项式  $p$ ,  $p(\sigma_3(T) \cap \rho_e(T)) \cap \rho_w(p(T)) = \emptyset$ .

**证明** 必要性。由定理 2 知, 对任意多项式  $p$ ,  $p(\sigma_3(T) \cap \rho_e(T)) \subseteq p(\sigma_3(T)) \subseteq \sigma_w(p(T))$ . 因此  $p(\sigma_3(T) \cap \rho_e(T)) \cap \rho_w(p(T)) = \emptyset$ .

充分性。根据定理 2, 只需证对任意多项式  $p$ ,  $p(\sigma_3(T)) \subseteq \sigma_w(p(T))$ . 对任意  $\mu_0 \notin \sigma_w(p(T))$ , 设  $p(T) - \mu_0 I = a(T - \lambda_1 I)^{n_1} (T - \lambda_2 I)^{n_2} \cdots (T - \lambda_k I)^{n_k}$ , 则  $T - \lambda_i I$  是 Fredholm 算子, 其中  $i = 1, \dots, k$ . 若存在  $j$ , 使得  $\text{ind}(T - \lambda_j I) > 0$ , 则  $\lambda_j \in \sigma_3(T)$ , 从而  $p(\sigma_3(T) \cap \rho_e(T)) \cap \rho_w(p(T)) \neq \emptyset$ , 矛盾。于是任意  $1 \leq i \leq k$  有  $\text{ind}(T - \lambda_i I) \leq 0$ . 同理可得任意  $1 \leq i \leq k$  有  $\text{ind}(T - \lambda_i I) \geq 0$ . 从而  $\lambda_i \notin \sigma_3(T)$ , 故  $\mu_0 \notin p(\sigma_3(T))$ .

**推论 5** 设  $T \in B(H)$ , 则对任意的多项式  $p$ ,  $p(T)$  满足 Browder 定理当且仅当

- (i)  $T$  满足 Browder 定理;
- (ii) 对任意多项式  $p$ ,  $p(\sigma_3(T)) = \sigma_3(p(T))$ .

**证明** 充分性。由定理 2, 显然。

必要性。先证  $p(\sigma_3(T)) \subseteq \sigma_3(p(T))$ . 设  $\mu_0 \notin \sigma_3(p(T))$ , 则  $n(p(T) - \mu_0 I) < \infty$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |\mu - \mu_0| < \delta$  时,  $\mu \in \rho_w(p(T)) \cap \rho_s(p(T))$ . 设  $p(T) - \mu_0 I = a(T - \lambda_1 I)^{n_1} (T - \lambda_2 I)^{n_2} \cdots (T - \lambda_k I)^{n_k}$ , 则  $n(T - \lambda_i I) < \infty$ , 其中  $i = 1, \dots, k$ . 由多项式  $p$  的连续性, 存在  $\varepsilon > 0$ , 当  $0 < |\lambda - \lambda_i| < \varepsilon$  时,  $0 < |p(\lambda) - p(\lambda_i)| = |p(\lambda) - \mu_0| < \delta$ , 所以  $p(\lambda) \in \rho_w(p(T)) \cap \rho_s(p(T)) \subseteq \rho_k(p(T))$ , 因此  $p(\lambda) \notin \sigma_k(p(T)) = p(\sigma_k(T))$  [14, Satz 6], 于是  $T - \lambda I$  是 Kato 算子。设  $p(T) - p(\lambda) I = a(T - \xi_1 I)^{l_1} (T - \xi_2 I)^{l_2} \cdots (T - \xi_r I)^{l_r} (T - \lambda I)^m$ , 其中  $l = 1, \dots, r$ . 则  $T - \lambda I$  是 Fredholm 算子。因为  $p(\lambda) \notin \sigma_w(p(T))$ , 根据定理 2, 则  $\lambda \notin \sigma_3(T)$ , 又由 Fredholm 算子的摄动定理, 从而  $T - \lambda I$  是 Weyl 算子。因此  $\lambda_i \notin \sigma_3(T)$ , 故  $\mu_0 \notin p(\sigma_3(T))$ .

下证  $\sigma_3(p(T)) \subseteq p(\sigma_3(T))$ . 任意  $\mu_0 \notin p(\sigma_3(T))$ , 设  $p(T) - \mu_0 I = a(T - \lambda_1 I)^{n_1} (T - \lambda_2 I)^{n_2} \cdots (T - \lambda_k I)^{n_k}$ , 其中  $i = 1, \dots, k$ . 则  $\lambda_i \notin \sigma_3(T)$ , 从而  $n(p(T) - \mu_0 I) < \infty$ . 由  $T$  满足 Browder 定理,  $\lambda_i \in \rho(T) \cup \text{iso } \sigma(T)$ . 不妨设  $\lambda_i \in \text{iso } \sigma(T)$ ,  $i = 1, \dots, k$ . 则  $\{\lambda_i\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , 为  $k$  个开闭集, 从而  $T = \text{diag}(T_1, T_2, \dots, T_k, A)$ , 其中  $\sigma(T_i) = \{\lambda_i\}$ ,  $\sigma(A) = \sigma(T) \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ . 于是  $p(T) = \text{diag}(p(T_1), p(T_2), \dots, p(T_k), p(A))$ , 其中  $\sigma(p(T_i)) = p(\sigma(T_i)) = \{\mu_0\}$ ,  $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$ . 因为  $\lambda_i \notin \sigma(A)$ , 故  $\mu_0 \notin p(\sigma(A))$ , 于是  $\mu_0 \in \text{iso } \sigma(p(T))$ , 因此  $\mu_0 \notin \sigma_3(p(T))$ .

**定理 3** 设  $T \in B(H)$ , 则对任意的多项式  $p$ ,  $p(T)$  满足 Browder 定理当且仅当  $T$  满足 Browder 定理且下列之一成立:

- (i)  $\rho_e^+(T) = \emptyset$ ;
- (ii)  $\sigma_3(T) \subseteq \sigma_e(T) \cup \sigma_{ea}(T)$ .

**证明** 必要性。 $T$  满足 Browder 定理显然成立。下面证明 (i), (ii) 至少有一个成立。采用反证法, 若存在  $\lambda_1 \in \rho_e^+(T)$  且  $\lambda_2 \in \sigma_3(T) \cap \rho_e(T) \cap \rho_{ea}(T)$ , 则  $T - \lambda_1 I$  是 Fredholm 算子且  $\text{ind}(T - \lambda_1 I) = n > 0$ ,  $T - \lambda_2 I$  是 Fredholm 算子且  $\text{ind}(T - \lambda_2 I) = -m < 0$ , 其中  $n$  和  $m$  都是正整数。令  $p(T) = (T - \lambda_1 I)^m (T - \lambda_2 I)^n$ , 则  $p(T)$  为 Fredholm 算子且  $\text{ind}(p(T)) = 0$ , 由  $p(T)$  满足 Browder 定理, 从而  $p(T)$  是 Browder 算子, 因此  $T - \lambda_1 I$  是 Browder 算子, 这与  $\text{ind}(T - \lambda_1 I) > 0$  矛盾。故  $\rho_e^+(T) = \emptyset$  与  $\sigma_3(T) \subseteq \sigma_e(T) \cup \sigma_{ea}(T)$  至少有一个成立。

充分性。若 (i) 成立, 即若  $T - \lambda I$  是 Fredholm 算子, 则  $\text{ind}(T - \lambda I) \leq 0$ . 设  $p(T) - \mu_0 I$  是 Weyl 算子, 令  $p(x) - \mu_0 = a(x - \lambda_1)^{n_1} (x - \lambda_2)^{n_2} \cdots (x - \lambda_k)^{n_k}$ ,  $\mu_0 = p(\lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ . 则  $p(T) - \mu_0 I = a(T - \lambda_1 I)^{n_1} (T - \lambda_2 I)^{n_2} \cdots (T - \lambda_k I)^{n_k}$  且  $0 = \text{ind}(p(T) - \mu_0 I) = n_1 \text{ind}(T - \lambda_1 I) + n_2 \text{ind}(T - \lambda_2 I) + \cdots + n_k \text{ind}(T - \lambda_k I)$ , 所以

$T - \lambda_i I$  是 Weyl 算子, 又  $T$  满足 Browder 定理, 故  $T - \lambda_i I$  是 Browder 算子, 于是  $p(T) - \mu_0 I$  是 Browder 算子。

同理, 若 (ii) 成立, 由  $\rho_3(T)$  的定义及 Fredholm 算子的摄动定理可知, 若  $T - \lambda I$  是 Fredholm 算子, 则  $\text{ind}(T - \lambda I) \geq 0$ . 于是, 仍可证得对任意的多项式  $p$ ,  $p(T)$  满足 Browder 定理。

事实上,  $\sigma_3(T) \subseteq \sigma_e(T) \cup \sigma_{ea}(T^*)$  当且仅当  $\rho_e^+(T) = \emptyset$ . 因此, 有如下推论。

**推论 6** 设  $T \in B(H)$ , 则对任意的多项式  $p$ ,  $p(T)$  满足 Browder 定理当且仅当  $T$  满足 Browder 定理且下列之一成立

$$(i) \sigma_3(T) \subseteq \sigma_e(T) \cup \sigma_{ea}(T^*);$$

$$(ii) \sigma_3(T) \subseteq \sigma_e(T) \cup \sigma_{ea}(T).$$

### 参考文献:

- [1] WEYL H V. Über beschränkte quadratische formen, deren differenz vollstetig ist [J]. Rendiconti Del Circolo Matematico Di Palermo, 1909, 27(1): 373-392.
- [2] BERBERIAN S K. An extension of Weyl's theorem to a class of not necessarily normal operators [J]. Michigan Mathematical Journal, 1969, 16(3): 273-279.
- [3] LI C G, ZHU S, FENG Y L. Weyl's theorem for functions of operators and approximation [J]. Integral Equations and Operator Theory, 2010, 67(4): 481-497.
- [4] CURTO R E, HAN Y M. Weyl's theorem for algebraically paranormal operators [J]. Integral Equations and Operator Theory, 2003, 47(3): 307-314.
- [5] AN I, HAN Y. Weyl's theorem for algebraically quasi-class A operators [J]. Integral Equations and Operator Theory, 2008, 62(1): 1-10.
- [6] SHI W, CAO X. Weyl's theorem for the square of operator and perturbations [J]. Communications in Contemporary Mathematics, 2015, 17(5): 36-46.
- [7] COBURN L A. Weyl's theorem for nonnormal operators [J]. Michigan Mathematical Journal, 1966, 13(3): 285-288.
- [8] DUGGAL B P. The Weyl spectrum of  $p$ -hyponormal operators [J]. Integral Equations and Operator Theory, 1997, 29(2): 197-201.
- [9] CAO X. Analytically class operators and Weyl's theorem [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 320(2): 795-803.
- [10] HARTE R, LEE W Y. Another note on Weyl's theorem [J]. Trans Amer Math Soc, 1997, 349(5): 2115-2124.
- [11] CAO X, GUO M, MENG B. Weyl spectra and Weyl's theorem [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 288(2): 758-767.
- [12] 闫慧凰, 曹小红. 有界线性算子及其函数演算的 Weyl 定理[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2020, 59(2): 22-27.
- [13] 王静, 曹小红. 有界线性算子的 Weyl 定理的判定[J]. 浙江大学学报(理学版), 2020, 47(5): 541-547.
- [14] SCHMOEGER C. Ein Spektralabbildungs satz [J]. Arch Math, 1990, 55(5): 484-489.

(责任编辑 冯兆永)